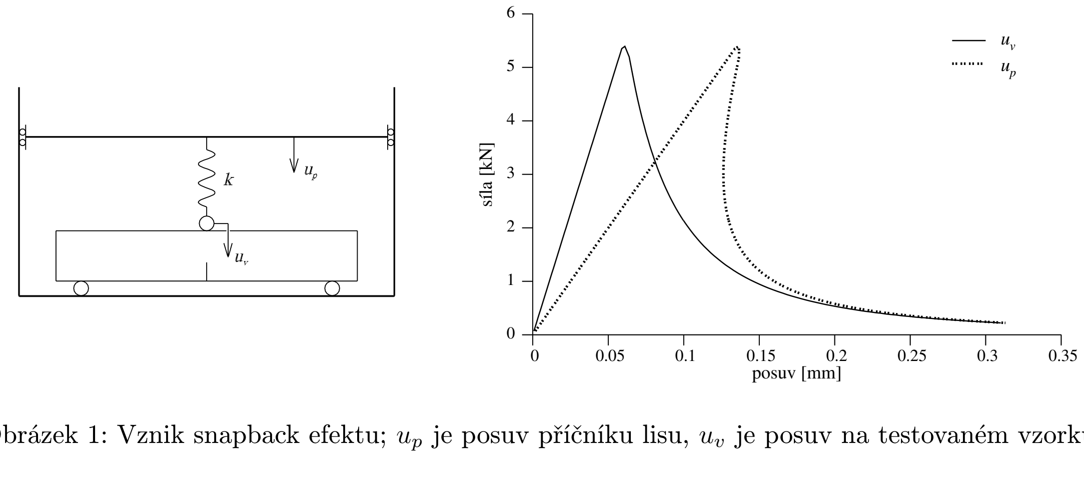
Dynamická simulace lomového experimentu

Petr Frantík[1]

Abstrakt : Příspěvek se zabývá modelováním lomového experimentu – tříbodového ohybu trámce se zářezem – pomocí dynamické simulace. Cílem bylo vystižení procesu katastrofické ztráty stability při zatěžovaní vnuceným posunem.

Díky lomovým experimentům se dovídáme více o vlastnostech a způsobu porušování materiálů a konstrukčních prvků. Kromě potřebných parametrů, jakými jsou tuhost či únosnost, nás zajímá lomová práce. Lomovou prací rozumíme přetvárnou práci, kterou je třeba vykonat, aby byl materiál resp. konstrukční prvek zcela porušen. Jedním ze způsobů jak se celková přetvárná práce měří, je kvazistatické zatěžování vnuceným posunem (tzv. *displacement-controlled loading*). Zaznamenává se aktuální posunutí a zatížení. Díky zatěžování vnuceným posunem je možno naměřit i sestupné větve zatěžovacího diagramu a stanovit tak složku přetvárné práce konané po překročení únosnosti.

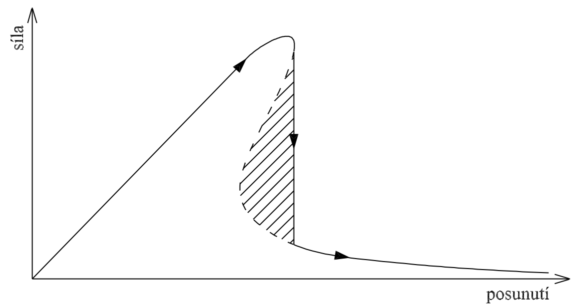
Zatěžování vnuceným posunem ovšem klade náročné požadavky na vlastnosti zatěžovací soupravy – lisu. Má-li zatěžování probíhat stabilně, je zapotřebí, aby lis absorboval co nejméně deformační energie, tj. musí mít dostatečnou tuhost. V případě, že lis není dostatečně tuhý, pak dochází ke kvalitativní změně zatěžovací dráhy nazývané *snapback*, viz např. [Bažant & Cedolin 1991]. Zatěžovací dráha se vlivem nízké tuhosti lisu deformuje a vzniká *záhyb*, viz obr. 1. Záhyb je v terminologii teorie katastrof [Arnold 1983] typická kubická singularita.



Obrázek 1: Vznik snapback efektu; u_p je posuv příčníku lisu, u_v je posuv na testovaném vzorku

[1]Petr Frantík, Ing., Ph.D., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: kitnarf@centrum.cz

Záhyb v zatěžovací dráze způsobí katastrofickou ztrátu stability, která bývá označována jako *snapdown* [Bažant & Cedolin 1991]. Dochází ke skoku v zatěžování a určitá část teoretické zatěžovací dráhy není naměřena, viz obr 2.



Obrázek 2: Katastrofický průběh zatěžování (efekt snapdown)

K záhybu v zatěžovací dráze dochází tehdy, je-li podkročena kritická hodnota tuhosti lisu, označme ji $k_{z,cr}$ pro kterou platí:

$$k_{z,cr} = -\min \frac{\mathrm{d}F_z}{\mathrm{d}u_v}, \tag{1}$$

kde F_z je kontaktní síla mezi hlavou lisu a vzorkem a u_v je posunutí vzorku. Podmínku vzniku záhybu na zatěžovací dráze tak můžeme psát ve tvaru:

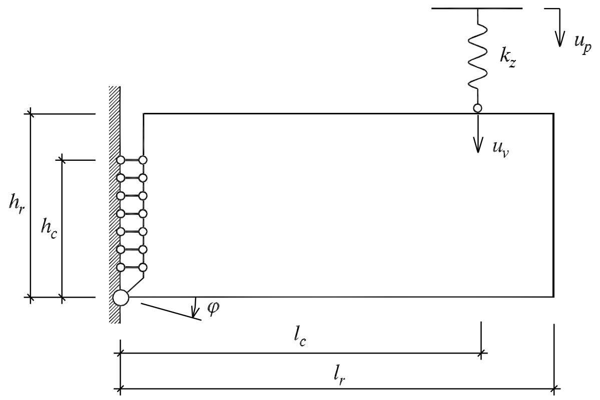
$$k_z < k_{z,cr}, \tag{2}$$

kde k_z je tuhost lisu. Slovně řečeno: pro vznik záhybu je nutné, aby tuhost lisu byla nižší, než záporně vzatá derivace na sestupné větvi teoretické zatěžovací dráhy vzorku.

V příspěvku se budeme věnovat modelování jevu snapdown pomocí dynamické simulace pro zjištění vlivu vlastností lisu a testovaného vzorku na průběh zatěžování. Jedná se konkrétně o lomový experiment na tříbodovém ohybu trámce se zářezem vyrobeného z cementového kompozitu. Cílem bylo nalézt doporučení pro vyhodnocení lomových experimentů se snapdown efektem.

1 Model

Trámec se zářezem je pro účely simulace nahrazen modelem s jedním stupněm volnosti, který vznikl rozšířením statického modelu [Frantík 2004]. Je uvažována symetrická polovina trámce nahrazená tuhou deskou připojenou kloubem a tahovými vlákny, viz obr. 3. Vliv tuhosti lisu je vzat pouze lineární pružinou s tuhostí k_z. Stav modelu v čase t je jednoznačně určen pootočením desky $\varphi(t)$, úhlovou rychlostí $\omega(t)$ a posunutím příčníku lisu $u_p(t)$. Geometrie modelu je dána polovinou délky trámce l_r, polovinou rozpětí trámce l_c, výškou trámce t_r a účinnou výškou průřezu v místě zářezu l_c.



Obrázek 3: Model trámce se zářezem včetně pružiny reprezentující tuhost lisu

Uvažujeme-li malá přemístění trámce, potom svislé posunutí trámce u_v, měřené v místě připojení hlavy lisu (tj. průhyb trámce) lze stanovit ze vztahu (viz obr. 3):

$$u_v = \varphi\, l_c. \tag{3}$$

Sílu F_z, kterou lis působí na tuhou desku a odpovídající ohybový moment M_z vypočítáme ze vztahů:

$$F_z = k_z(u_p - u_v), \quad M_z = F_z\, l_c. \tag{4}$$

Pro sestavení pohybových rovnic dynamického systému, popisujícího model trámce s vlivem tuhosti lisu, potřebujeme rovněž vyjádřit působení tahových vláken, která nahrazují cementový kompozit v místě zářezu. Pro jednoduchost uvažujme, že v daném okamžiku t zatěžují vlákna tuhou desku ohybovým momentem $M_v(t)$. Stanovení velikosti momentu $M_v(t)$ bude popsáno dále. Pohybové rovnice lze tedy zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= \omega, \\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{I_r}\left(l_c\, k_z\,(u_p - \varphi\, l_c) - M_v(t,\varphi) - c_\omega\, I_r\, \omega\right), \\ \frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t} &= v_p, \end{aligned} \tag{5}$$

kde c_ω je koeficient lineárního viskózního útlumu, v_p je rychlost posunu příčníku lisu a I_r je moment setrvačnosti tuhé desky nahrazující trámec, pro který paltí:

$$I_r = \frac{m_r}{3}(l_r^2 + h_r^2), \tag{6}$$

kde m_r je hmotnost trámce.

1.1 Vlákna

Vlákna reprezentují cementový kompozit v oblasti zářezu. Jejich vliv na pohyb tuhé desky zprostředkovává moment M_v, pro který lze psát:

$$M_v(t,\varphi) = \sum_{i=1}^{n_v} F_{v,i}(t,\varphi)\, r_i, \tag{7}$$

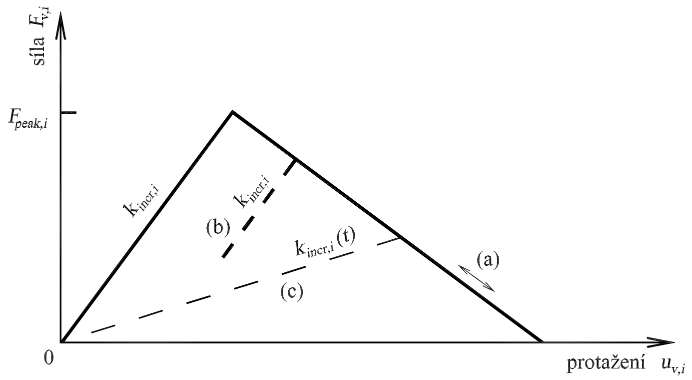
kde n_v je počet vláken, $F_{v,i}(t,\varphi)$ je síla ve i-tém vláknu, působící ve vzdálenosti r_i od kloubu (viz obr 3). Pro sílu $F_{v,i}(t,\varphi)$ platí:

$$F_{v,i}(t,\varphi) = f_i(t, u_{v,i}), \quad u_{v,i} = \varphi\, r_i, \tag{8}$$

kde $f_i(t, u_{v,i})$ je funkce napjatosti i-tého vlákna. Funkce napjatosti, která je závislá na čase z důvodu uvažování nepružného působení vlákna je zde zvolena jako bilineární, se třemi způsoby odlehčení:

- dokonale pružné vlákno (při snižování protažení vlákna na sestupné větvi se zvyšuje síla ve vláknu), viz obr. 4 (a),
- vlákno s nevratnou deformací (po překročení maximální síly ve vláknu $F_{peak,i}$ probíhá odlehčování po větvi rovnoběžné se sestupnou větví nepoškozeného vlákna), viz obr. 4 (b),
- vlákno se snížením tuhosti (po překročení maximální síly ve vláknu $F_{peak,i}$ probíhá odlehčování po vzestupné větvi jdoucí do počátku diagramu), viz obr. 4 (c).

Každé vlákno je dáno třemi parametry (viz obr. 4): tuhostí $k_{incr,i}$, pevností $F_{peak,i}$ a velikostí celkové přetvárné práce W_i nutné pro přetržení vlákna.



Obrázek 4: Funkce napjatosti vlákna

Pro odstranění závislosti modelu na počtu vláken jsou definovány globální parametry: tuhost v tahu k_t, pevnost v tahu f_t a koeficient přetvárné práce c_w. Pro vystižení nehomogenity průřezu je uvažována variabilita tahové pevnosti vláken po výšce průřezu (obdobně viz [Keršner et al. 2005]). Přepočet globálních parametrů na parametry vláken je dán vztahy:

$$
\begin{aligned}
&k_{incr,i} = \frac{k_t}{n_v}, \\
&F_{peak,i} = \frac{f_t}{n_v} \sum_{j=1}^{n_f} A_j \sin\left(j\pi\left(\frac{r_i}{h_c} + \theta_j\right)\right), \quad F_{peak,i} \geq 0, \\
&W_i = c_w \frac{F_{peak,i}^2}{2k_{incr,i}},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

kde n_f je počet bázových funkcí reprezentujících variabilitu vlastností vláken po výšce průřezu, A_j je amplituda j-té bázové funkce, θ_j je fázové posunutí j-té bázové funkce.

2 Aproximace experimentu

Pro ověření odezvy modelu a zjištění vlastností zatěžovací soupravy byly aproximovány výsledky dvou experimentů na trámci se zářezem. Experimenty byly provedeny lisem HECKERT FPZ 100/1 na FAST VUT v Brně Ing. Pavlem Schmidem, Ph.D. pro Ing. Ditu Matesovou, Ph.D.; Vyhodnocení jiných vzorků z téže betonové směsi lze nalézt v [Matesová & Keršner 2006]. Parametry testovaných vzorků jsou uvedeny v tab. 1.

číslo	**hmotnost** m_r	**délka** $2l_r$	**rozpětí** $2l_c$	**výška** h_r	**výška** h_c
1	6876.5 g	483.7 mm	400 mm	78.64 mm	75.57 mm
2	6270 g	483.4 mm	400 mm	79.25 mm	53.45 mm

Tabulka 1: Parametry vzorků z cementového kompozitu

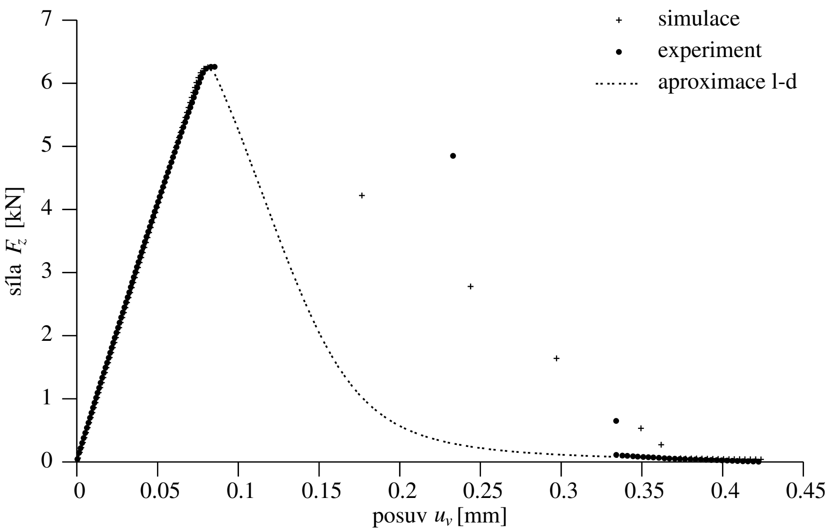
Výsledkem experimentů jsou vždy dvě časové řady, snímané v intervalu $\Delta t = 0.2$ s: časová řada svislého posuvu na trámci $u_v(t)$ a časová řada síly vyvozené lisem $F_z(t)$. Z těchto dvou časových řad lze snadno získat zatěžovací diagram (tzv. *l*-*d* diagram) trámců, který je funkcí $F_z(u_v)$.

Naměřené l-d diagramy $F_z(u_v)$ byly užity pro aproximaci statických parametrů modelu: tahové tuhosti k_t, tahové pevnosti f_t, koeficientu přetvárné práce c_w, amplitud bázových funkcí $A_{1,2}$ a fází bázových funkcí $\theta_{1,2}$. Aproximace byla provedena pomocí genetických algoritmů, viz např. [Cacka 2003]. Aproximované parametry modelu jsou uvedeny v tab. 2.

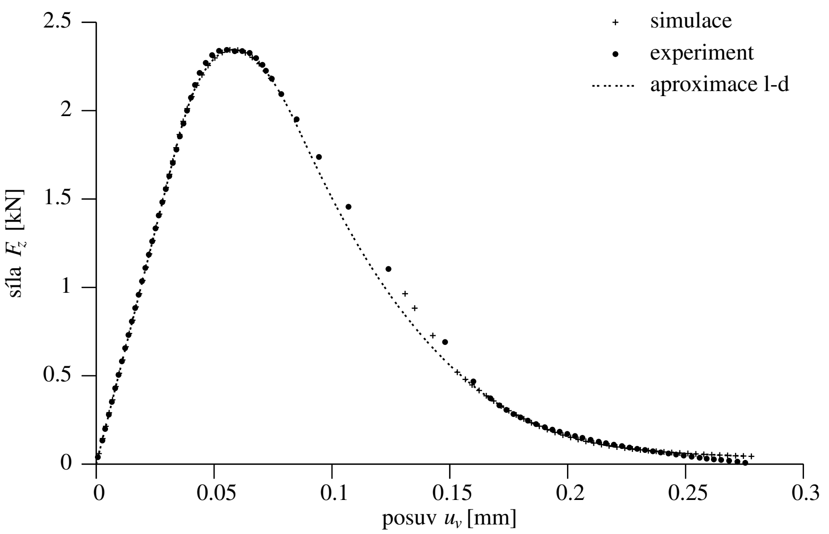
parametr	**jednotka**	**vzorek č. 1**	**vzorek č. 2**
k_t	kN.mm^{-1}	1704.3	2213.7
f_t	kN	34.413	19.830
c_w	–	1.1811	2.4239
A_1	–	0.52568	-0.18220
θ_1	–	-0.25242	0.65228
A_2	–	–	0.17107
θ_2	–	–	0.63291

Tabulka 2: Aproximované statické parametry modelu pro oba vzorky

Na obr. 5 a 6 jsou vidět výsledné aproximace l-d diagramů obou vzorků včetně výsledku dynamické simulace s parametry: tuhost lisu $k_z = 21.5\,\mathrm{kN.mm^{-1}}$, rychlost zatěžování $v_z = 0.00126\,\mathrm{mm.s^{-1}}$ a koeficient útlumu $c_\omega = 4.58\,\mathrm{kN.mm.s.kg^{-1}}$. Použit byl model dokonale pružného vlákna, protože nejlépe odpovídal naměřeným datům, viz dále.



Obrázek 5: Naměřený l-d diagram vzorku č. 1 včetně aproximace a výsledku dynamické simulace



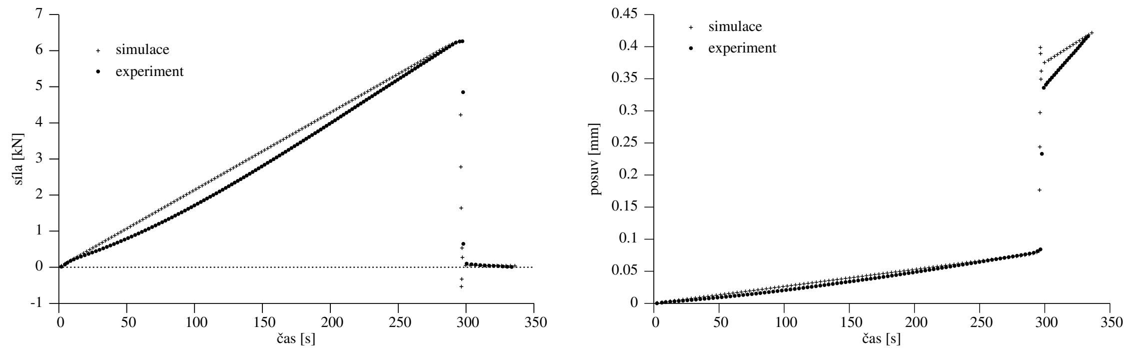
Obrázek 6: Naměřený l-d diagram vzorku č. 2 včetně aproximace a výsledku dynamické simulace

Vzorek č. 1 má počáteční ohybovou tuhost $83.2\,\mathrm{kN.mm^{-1}}$ (model $81.2\,\mathrm{kN.mm^{-1}}$), což představuje téměř $3.9\times$ vyšší tuhost než má lis. Vzorek č. 2, který má počáteční ohybovou tuhost $53.1\,\mathrm{kN.mm^{-1}}$ (model $52.8\,\mathrm{kN.mm^{-1}}$), je $2.5\times$ tužší než lis.

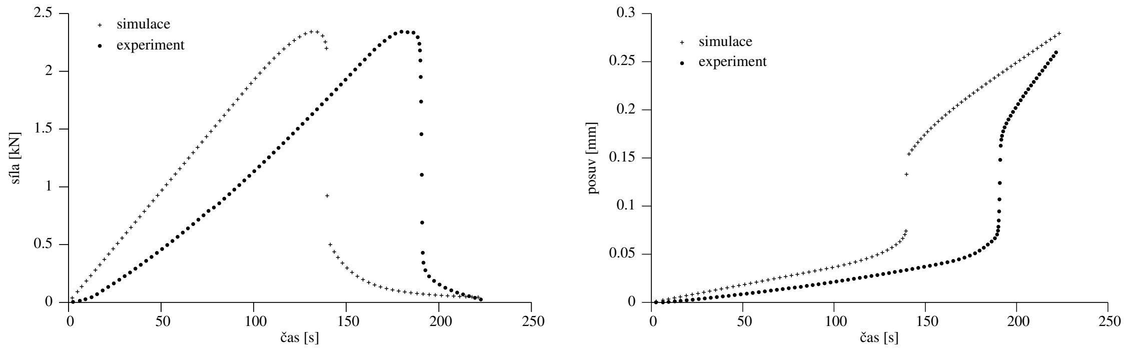
Z obr. 5 a 6 je patrné, jak se projevuje katastrofický průběh zatěžování, způsobený nízkou tuhostí lisu, na naměřeném l-d diagramu. Obzvláště v případě vzorku č. 1 je vidět výrazný skok v zatěžovaní. U druhého vzorku se natolik efekt snapdown neprojevil.

Více o průběhu zatěžování nám prozradí samotné časové řady, viz obr. 7 pro vzorek č. 1 a obr. 8 pro vzorek č. 2. Z grafů je patrné, že při zatěžování došlo v krátkém časovém úseku ke skoku naměřených hodnot, což jasně ukazuje na katastrofu. Body v bezprostředním okolí katastrofické události se tak pro vyhodnocení l-d diagramu trámců nedají použít.

Z časových řad je rovněž patrné, že rychlost zatěžování lisu (tj. rychlost posuvu příčníku v_p) není konstantní. Popřípadě se v zatěžovací soustavě nachází člen, který nebyl vhodně vystižen. Tento závěr lze učinit díky následující tezi: Předpokládejme konstantní rychlost posuvu příčníku v_p včetně počáteční podmínky $u_p(0) = 0$. Je-li průběh sestupné větve l-d diagramů asymptotický pro $u_v \to \infty$, s asymptotou $F_z = 0\,\mathrm{kN}$, pak asymptota časové řady posuvu trámce u_v pro $t \to \infty$ je dána funkcí odpovídající posunu příčníku $u_p(t) = v_p\, t$. Pohledem na grafy časových řad se můžeme přesvědčit, že ačkoliv u výsledků simulace tomu tak je, výsledky experimentů ukazují na proměnlivou rychlost zatěžování. Poznamenejme, že u vzorku č. 2 se výsledek simulace více rozchází s naměřenými časovými řadami, viz obr. 8.



Obrázek 7: Časové řady vzorku č. 1: síla v hlavě lisu F_z (vlevo), posuv trámce u_v (vpravo)



Obrázek 8: Časové řady vzorku č. 2: síla v hlavě lisu F_z (vlevo), posuv trámce u_v (vpravo)

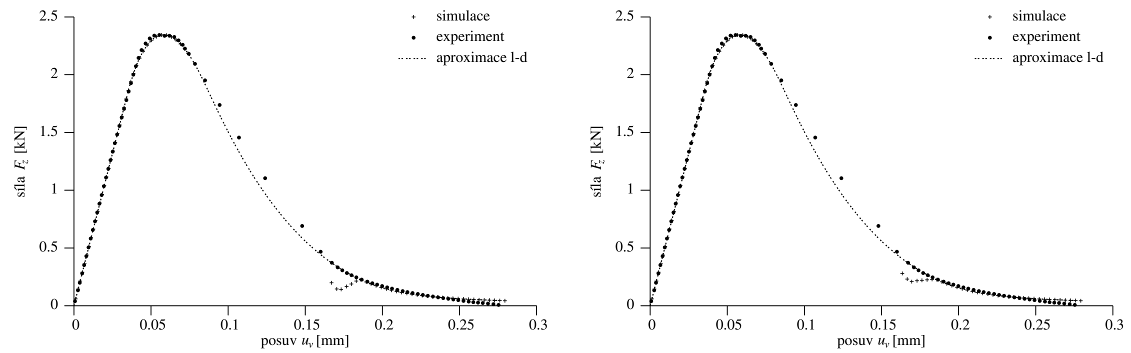
3 Parametrické studie

Výsledky dynamických simulací, uvedené v předchozí kapitole, byly získány díky studiu modelu při změně parametrů lisu, parametru tlumení a typu odlehčení vláken. Ukažme si, jaký vliv mají tyto parametry na výsledek simulace.

3.1 Vliv způsobu odlehčení vláken

Odlišné modelování odlehčení vláken má u lomového experimentu s konstantním přírůstkem posuvu lisu význam pouze v případě, dochází-li k rozkmitání zatěžovaného vzorku. Při pomalém tlumeném zatěžování může vzorek rozkmitat pouze některý druh náhlé změny, jakým je v našem případě rychlý pokles tuhosti vzorku.

Na obr. 9 je vidět srovnání odezvy při odlehčení vláken typu (b) a (c) pro vzorek č. 2. Odezva modelu při způsobu odlehčení (a) – dokonale pružné, je vidět výše na obr. 6. V případě vzorku č. 1 není vliv způsobu odlehčení patrný.



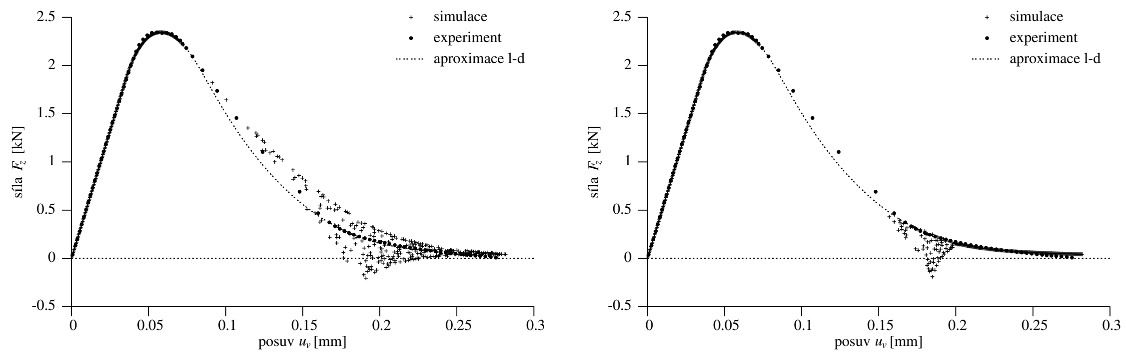
Obrázek 9: Srovnání výsledků simulace vzorku č. 2 při odlišných způsobech odlehčení vláken; vlevo je odlehčení typu (b) – s nevratným protažením, vpravo je odlehčení typu (c) – se sníženým sklonem při odlehčení

3.2 Vliv útlumu

Na obr. 10 je vidět srovnání simulací vzorku č. 2 při nižší útlumu, $c_\omega = 0.1\,\mathrm{kN.mm.s.kg}^{-1}$, pro typ odlehčení (a) a (b), tj. dokonale pružné odlehčení a odlehčení s poškozením. Z grafu je patrné, že dokonale pružná vlákna mají tendenci více kmitat. Důležitým aspektem kmitání vláken dokonale pružných oproti vláknům nepružným je překmitnutí přes hodnotu l-d diagramu, viz obr. 10 vlevo (srovnej s průběhem vpravo).

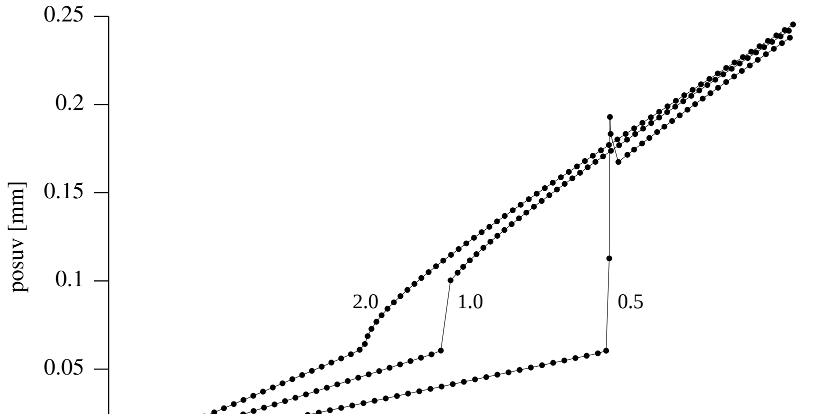
3.3 Vliv tuhosti lisu

Obr. 11 znázorňuje průběh časové řady posunu trámce u_v pro různé poměry tuhosti lisu k_z a počáteční tuhosti trámce. Zobrazeny jsou časové řady pro tři hodnoty poměrů tuhosti: 0.5, 1 a 2. Z hlediska snapdown efektu by bylo výstižnější vyjádřit tuhost lisu poměrem ke kritické hodnotě $k_{z,cr}$, viz vztah (1). Ovšem, stanovení této hodnoty je podmíněno



Obrázek 10: Srovnání výsledků simulace vzorku č. 2 při odlišných způsobech odlehčení vláken a při nižším koeficientu útlumu; vlevo je odlehčení typu (a) – dokonale pružné, vpravo je odlehčení typu (b) – s nevratným protažením

provedením experimentu. Proto byl zvolen poměr k počáteční tuhosti trámce, kterou je možno snadno výpočetně odhadnout, popř. experimentálně naměřit. Průběhy časových řad slouží proto pouze pro orientaci experimentátora, který odhaduje tuhost zatěžovací soupravy z naměřených časových řad.



Obrázek 11: Znázornění vlivu tuhosti lisu na průběh časové řady posunu trámce u_v; Jednotlivé řady jsou odlišeny poměrem tuhosti lisu k_z a počáteční tuhosti trámce

4 Závěr

V příspěvku byly prezentovány výsledky dynamické simulace lomových experimentů s konstantním přírůstkem posunu s katastrofickou ztrátou stability (snapdown efektem). Pro simulaci byl užit jednostupňový model lomu trámce při ohybu se zahrnutím vlivu tuhosti lisu pomocí přidané lineární pružiny. Simulace ukázaly, že zvolený model nepostihuje všechny efekty, které byly experimentálně naměřeny. Jeden z nesouladů je rychlost posuvu příčníku lisu, která měla být konstantní. Druhým problémem je tlumení a jeho výstižnost. Pro zlepšení jeho reprezentace bude zřejmě třeba provést dynamické měření na lisu.

Experimentálně naměřeným datům kupodivu nejlépe odpovídá spíše materiál dokonale pružný (i na sestupné větvi), než materiál nepružný. Tento závěr si rovněž zasluhuje další výzkum.

Nemůže-li se experimentátor vyhnout použití lisu a vzorku takového, že vzniká katastrofický průběh zatěžování, pak je vhodné analyzovat zejména časovou řadu posuvu vzorku. Z ní je patrné, které body byly naměřeny bez výrazných dynamických účinků. Pro vyhodnocení lomové práce může být dobrou pomůckou aproximace l-d diagramů pomocí použitého modelu.

Poděkování

Práce na příspěvku byly podporovány z prostředků projektu MŠMT 1K041111.
Chtěl bych rovněž vyjádřit poděkování kolegovi Miroslavu Vořechovskému za podnětné diskuze k tématu.

Literatura

[Arnold 1983] Arnold, V. I., 1983: *Teória katastrof* (orig. Teorija katastrof, vydavatelstvo Moskevské univerzity 1983), vydavateľstvo Alfa, Bratislava

[Bažant & Cedolin 1991] Bažant Z. P., Cedolin L., 1991: *Stability of Structures, Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*, Oxford University Press, New York

[Cacka 2003] Cacka, P., 2003: Vícekriteriální genetické algoritmy. Diplomová práce, Ústav automatizace a informatiky FSI VUT v Brně

[Frantík 2004] Frantík, P., 2004: Jednoduchý model lomu trámce, Sborník semináře *Problémy lomové mechaniky IV.*, ÚFM AV ČR a STM FAST VUT v Brně, p. 21–27

[Keršner et al. 2005] Keršner, Z., Frantík, P., Řoutil, L., Veselý, V., 2005: Approximation of bending fracture model by load-deflection diagrams, konference *Inženýrská mechanika 2005*, CD sborník, Svratka, 7 stran

[Matesová & Keršner 2006] Matesová, D., Keršner, Z., 2006: Vliv vodního součinitele a typu uložení vzorků při zrání na lomové parametry betonu, CD sborník mezinárodní konference *Modelování v mechanice*, FAST VŠB-TU Ostrava, 8 stran