ALGORITMUS SILOVÉ METODY

CONSISTENT DEFORMATION METHOD ALGORITHM

Petr Frantík[1], Michal Štafa[2], Tomáš Pail[3]

Abstrakt

Příspěvek se věnuje popisu algoritmizace silové metody sloužící pro výpočet staticky neurčitých prutových konstrukcí. Algoritmus je koncipován tak, aby v co největší míře odpovídal postupu při výpočtu konstrukce člověkem.

Klíčová slova

silová metoda, algoritmus, automatizace.

Abstract

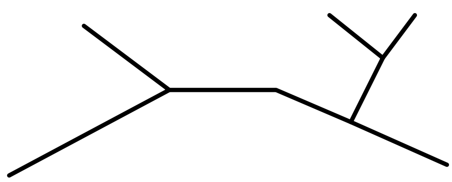
The paper presents the algorithm for automation of the method of consistent deformations, or sometimes referred to as the force or flexibility method for solving of statically indeterminate bar structures. The algorithm is designed to reflect the solving procedure used by a man.

Keywords

force method, consistent deformation method, flexibility method, algorithm, automation.

1 Silová metoda

Pojmem silová metoda je zde myšlen výpočetní postup pro řešení rovinných, staticky neurčitých, prutových konstrukcí ve formě užívané pro obvykle neautomatizovaný výpočet prováděný člověkem. Má tři fáze: vytvoření fiktivní staticky určité konstrukce modifikací řešené konstrukce pomocí odebrání vnějších a/nebo vnitřních *redundantních* vazeb, přidání neznámého zatížení odpovídajícího odstraněným vazbám, a řešení deformačních podmínek, kterým musí vytvořená staticky určitá konstrukce (tzv. *základní*) podléhat, aby svým chováním odpovídala původní konstrukci.



Obr. 1: Otevřený tuhý celek

[1] Ing. Petr Frantík, Ph.D., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 95, 602 00 Brno, e-mail: kitnarf@centrum.cz,
[2] Ing. Michal Štafa, dtto., e-mail: stafa.m@fce.vutbr.cz,
[3] Ing. Tomáš Pail, dtto., e-mail: pail.t@fce.vutbr.cz.

Samotné řešení deformačních podmínek vyžaduje analýzu funkcí vnitřních sil zvolené staticky určité konstrukce. Tato analýza se provádí rovněž v několika krocích: Nejprve se konstrukce uvolní z vnějších vazeb, které se nahradí neznámými silami. Poté se konstrukce rozdělí pomocí řezů na souvislé monolitické části bez uzavření (nazveme *otevřené celky*), viz obr. 1. Poznamenejme, že ve smyslu teorie grafů se jedná o tzv. stromy. Jsou souvislé a neobsahují uzavřené části. Bez vnějších vazeb má každý takový tuhý celek v rovině právě tři stupně volnosti. V místech řezů se vzájemné působení částí rovněž nahradí neznámými silami. Nakonec se pro každý otevřený celek sepíšou tři podmínky rovnováhy:

$$\begin{aligned} &\sum F_{xi} = 0, \\ &\sum F_{yi} = 0, \\ &\sum M_i = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

kde F_{xi}, F_{yi} jsou složky působící síly s indexem i, M_i je moment této síly ke zvolenému bodu.

Výsledkem soupisu podmínek rovnováhy je soustava $3m$ lineárních rovnic o stejném počtu neznámých vazebných sil, kde m je počet otevřených tuhých celků.

Získání skupiny otevřených celků vyžaduje správnou volbu řezů konstrukce. Tyto se provádí v místech, kde jsou do konstrukce umístěny např. vnitřní klouby či jiné způsoby uvolnění vnitřních vazeb. Pro účely souhrnného popisu nazývejme tato uvolnění *separátory*, jelikož oddělují (přerušují) souvislé části konstrukce.

Jakmile vyřešíme neznámé vazebné síly, lze pro libovolný bod zvoleného otevřeného celku určit vnitřní síly z podmínek rovnováhy (1).

2 Deformační podmínky

Deformační podmínky zapisujeme pro každou ze složek redundantních vazeb, které byly odstraněny pro vytvoření základní staticky určité konstrukce. Obecná deformační podmínka má tvar:

$$\delta_i = 0, \tag{2}$$

kde δ_i je deformace (tj. pootočení nebo posunutí) v místě odstraněné složky vazby ve směru této složky. Index i označuje pořadí deformace. Počet deformačních podmínek n je roven stupni statické neurčitosti původní konstrukce.

Řešíme-li lineární úlohu, pak je deformace lineárně závislá na zatížení a neznámých silách redundantních vazeb. Díky tomu můžeme provést její rozklad:

$$\begin{aligned} &\delta_i(F, X_1, X_2, ..., X_n) = 0, \\ &\delta_i(F) + \delta_i(X_1) + \delta_i(X_2) + ... + \delta_i(X_n) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

kde F zastupuje veškeré vnější zatížení respektive zatížení od vzájemného spolupůsobení otevřených celků a X_i označuje neznámé síly redundantních vazeb.

Výpočet lze dále prakticky zjednodušit řešením deformací od jednotkových sil redundantních vazeb upravením výrazu (3) na tvar:

$$\delta_{i0} + \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \ldots + \delta_{in} X_n = 0, \tag{4}$$

kde $\delta_{i0} = \delta_i(F)$ je deformace δ_i od vnějšího zatížení a δ_{ij} označuje deformaci δ_i od jednotkové redundantní vazebné síly X_j.

Výpočet dané deformace δ_i se provede pomocí tzv. Castiglianovy metody (metoda jednotkových sil, viz např. [1]) mající tvar:

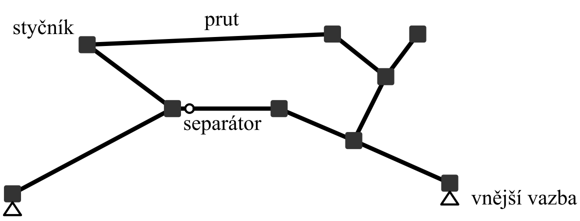
$$\delta_{ij} = \int_l \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int_l \frac{V_i V_j}{GA_\kappa} dx + \int_l \frac{M_i M_j}{EI} dx, \tag{5}$$

kde N_i, V_i, M_i jsou funkce vnitřních sil na základní staticky určité konstrukci od vnějšího zatížení ($i = 0$) respektive od jednotkové redundantní vazebné síly ($i = 1, 2, \ldots, n$). Integruje se po délce prutů celé konstrukce, přičemž EA je obecně funkce normálové tuhosti, GA_κ smykové a EI ohybové tuhosti průřezů prutů.

Závěrem získáme soustavu (lineárních) rovnic, jejímž řešením obdržíme neznámé hodnoty sil redundantních vazeb.

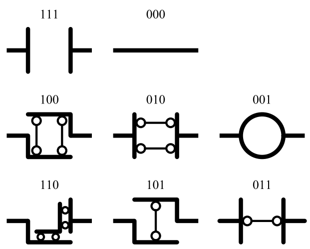
3 Elementy konstrukce

Z hlediska popisu algoritmu rozdělíme model konstrukce na pruty a styčníky, viz obr. 2. Styčník slouží ke spojení prutů a zároveň pruty ukončuje. Vnější vazby (okrajové podmínky) lze zadat pouze na styčnících.



Obr. 2: Elementy modelu konstrukce

Prut může mít na svých koncích umístěné separátory se třemi složkami: dvě vzájemně kolmá posunutí a pootočení. Na obr. 3 je vidět znázornění všech kombinací separátorů. Ačkoliv je separátor umístěn na konci prutu, jeho poloha je chápána jako totožná s polohou přilehlého styčníku.



Obr. 3: Mechanické znázornění možných separátorů (1 – vazba odstraněna, 0 – vazba ponechána)

Orientaci separátorů budeme dále uvažovat shodnou s orientací prutu. Každá složka separátoru tak bude odpovídat jedné z vnitřních sil.

4 Algoritmus rozkladu

Jádrem výpočtu je řešení staticky určité konstrukce. Z daného modelu, jenž může tvořit uzavřené celky a nemusí být souvislý, je třeba určit *množinu otevřených celků*, pro které se budou psát statické podmínky rovnováhy. Pro vytvoření této množiny jsou navrženy dvě metody prohledávající graf konstrukce, *startovací metoda* a *rekurzivní metoda*. Vezměme libovolný prut modelu (startovací). Tento prut nechť spojuje dva styčníky (alias uzly grafu), z nichž první budeme nazývat levý a druhý pravý. Každý uzel grafu si bude pamatovat dvě celá čísla: počet návštěv a počet přímých návštěv (viz dále). Pak má startovací metoda následující strukturu:

- Inicializace průzkumu (nastavení počtu návštěv uzlu grafu na nulu a vymazání *seznamu navštívených prutů*).
- Spuštění rekurzivní metody průzkumu:
  - směrem doleva, tj. pro startovací prut a pravý uzel (viz dále),
  - směrem doprava, tj. pro startovací prut a levý uzel.
- Přidání startovacího prutu do seznamu navštívených prutů.

Rekurzivní metoda se volá pro výchozí prut a výchozí uzel (styčník) a má následující tvar:

- Pokud byl výchozí uzel již navštíven, přidej prut do seznamu navštívených prutů.
- Nalezení *protějšího uzlu* výchozího prutu vzhledem k výchozímu uzlu.
- Navštívení protějšího uzlu. Tj. spuštění metody, která zajistí zvýšení počtu návštěv uzlu.
- Zjištění, zda-li je protější uzel:
  - separován od výchozího prutu separátorem,
  - poprvé navštíven (nezáleží jestli přes separátor nebo přímo),
  - poprvé přímo navštíven (pouze přímo, tj. ne přes separátor).
- Pokud je protější uzel poprvé přímo navštíven, potom ber postupně všechny pruty jdoucí do protějšího uzlu vyjma výchozího prutu:
  - pokud nebyl prut dosud navštíven (nenachází se v seznamu navštívených prutů) a zároveň platí, že tento prut není separován od protějšího uzlu, pak spusť rekurzivní metodu pro tento prut a protější uzel.

Spuštěním startovací metody dojde k sestavení seznamu navštívených prutů, který určuje otevřený celek pro daný startovací prut. Tedy sestavení množiny otevřených celků startovací metodou vyžaduje nalezení množiny startovacích prutů.

Poznamenejme, že rekurzivní metoda průzkumu je orientovaná, a proto ji lze bez dalších úprav rovněž použít pro určování koncových sil prutu, ze kterých lze posléze stanovit funkce vnitřních sil.

5 Algoritmus sestavení podmínek rovnováhy

Nyní, když máme určenou množinu otevřených celků, můžeme začít sepisovat podmínky rovnováhy. Z dříve uvedeného (kapitola 1) víme, že počet podmínek je trojnásobkem počtu otevřených celků. Soustavu sestavíme následujícím postupem:

- Ověření statické určitosti. Tj. počet podmínek rovnováhy se musí rovnat počtu neznámých (vnějších a vnitřních) vazebných sil.
- Nastav *ukazatel aktuálního sloupce* v matici levých stran na nulu.
- Nastav *ukazatel aktuálního řádku* v soustavě na nulu.
- Pro každý otevřený celek:
  - Spusť startovací metodu průzkumu celku.
  - Projdi všechny uzly modelu:
    - Urči, zda je daný uzel od celku separovaný.
    - Nastav sinus a kosinus transformačního úhlu na hodnoty $\sin\alpha = 0$ a $\cos\alpha = 1$ (kvůli obecnosti, viz dále).
    - Nastav znaménko *s* na hodnotu 1 (rovněž kvůli obecnosti).
    - Urči počet neznámých vnějších vazeb na daném uzlu (pozn.: i pro nezapočitatelný uzel).
    - Nastav *indikátor započitatelnosti*. Daný uzel je započitatelný, pokud byl při průzkumu celku přímo navštíven.
    - Je-li uzel započitatelný, spusť *metodu nastavení levé strany*.
    - Posuň ukazatel aktuálního sloupce o počet neznámých vnějších vazeb uzlu (pozn.: i pro nezapočitatelný uzel).
  - Projdi všechny pruty modelu:
    - Urči sinus a kosinus úhlu prutu pro transformaci do globálního souřadného systému (označíme $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$).
    - Má-li prut na levém uzlu separátor, pak:
      - Nastav znaménko *s* na hodnotu 1, jestliže je levý uzel od prutu separovaný, jinak $s = -1$.
      - Urči počet neznámých vnějších vazeb na daném separátoru (pozn.: i pro nezapočitatelný separátor).
      - Nastav indikátor započitatelnosti. Daný separátor je započitatelný, pokud je daný prut součástí celku, nebo pokud je levý uzel přímo navštívený (při průzkumu celku).
      - Je-li separátor započitatelný, spusť metodu nastavení levé strany.
      - Posuň ukazatel aktuálního sloupce o počet neznámých vnějších vazeb separátoru.
    - Má-li prut na pravém uzlu separátor, pak proveď analogicky totéž co pro levý separátor.
  - Projdi všechna uzlová zatížení modelu. Pokud není uzel od celku separovaný, pak přidej záporně vzaté složky výslednice zatížení do vektoru pravých stran (pozn.: samozřejmě s ohledem na aktuální řádek).
  - Projdi všechna prutová zatížení modelu. Pokud je prut součástí celku, pak přidej záporně vzaté složky výslednice zatížení do vektoru pravých stran.
  - Posuň ukazatel aktuálního řádku o tři.

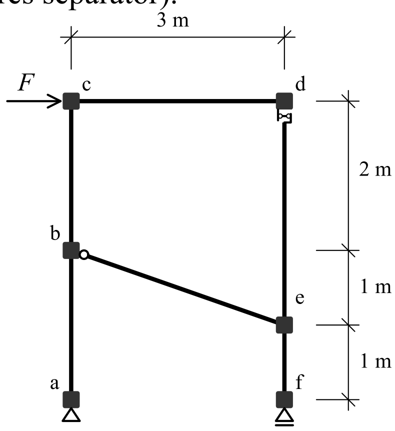
Metoda nastavení levé strany (volaná ve výše popsané metodě), která dostává informaci o aktuálním řádku *r* a sloupci *c*, referenčním bodě (uzel či přilehlý uzel), transformačním sinu a kosinu a znaménku *s*, má tvar:

- Jestliže má daný uzel nebo separátor neznámou:
  - X^* -- zapiš vektor $\{s \cos\alpha, s \sin\alpha, s\,(x \sin\alpha - y \cos\alpha)\}^T$,

- Y^* -- zapiš vektor $\{-s \sin\alpha, s \cos\alpha, s (x \cos\alpha + y \sin\alpha)\}^T$,
- M -- zapiš vektor $\{0, 0, s\}^T$,

6 Příklad

Abychom si ujasnili průběh popsaného algoritmu k řešení základní staticky určité konstrukce, sestavíme soustavu podmínek rovnováhy pro model znázorněný na obr. 4. Model konstrukce je složen ze šesti prutů a šesti styčníků. Zatížen vodorovnou silou F = 10 N na styčníku c. Obsahuje jeden vnitřní kloub a jeden separátor s vazbou ve vodorovném směru. Model je tak složen ze dvou otevřených celků. První celek je tvořen styčníky abcd s přímým napojením. Druhý celek určují styčníky bdef, z nichž styčníky bd jsou napojeny nepřímo (přes separátor).

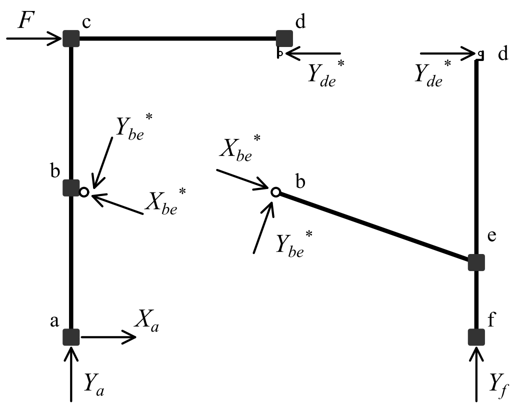


Obr. 4: Model řešené konstrukce

Nyní model rozdělíme a uvolníme z vazeb, viz obr. 5. Dostáváme šest neznámých vazebných sil. Tři vnější X_a, Y_a, Y_f a tři vnitřní X_{be}^*, Y_{be}^*, Y_{de}^* (hvězdičkou je označen lokální souřadný systém). Transformační koeficienty pro prut de a be jsou uvedeny v tab. 1:

prut	sinα	cosα
de	-1	0
be	-0.3162	0.9487

Tab. 1: Transformační koeficienty



Obr. 5: Rozklad modelu a uvolnění z vazeb

Nyní sestavíme soustavu podmínek rovnováhy nejprve pro celek abcd a poté pro celek bdef, tj. celkem šest rovnic, viz tab. 2. Řešení je vypsáno v tabulce 3.

celek	podmínka	X_a	Y_a	Y_f	Y_{de}*	X_{be}*	Y_{be}*	F
abcd	ΣF_x	1	0	0	-1	-0.95	-0.32	-10
	ΣF_y	0	1	0	0	0.32	-0.95	0
	ΣM	0	0	0	4	1.90	0.63	40
bdef	ΣF_x	0	0	0	1	0.95	0.32	0
	ΣF_y	0	0	1	0	-0.32	0.95	0
	ΣM	0	0	3	-4	-1.90	-0.63	0

Tab. 2: Soustava podmínek rovnováhy (zaokrouhleno)

X_a	Y_a	Y_f	Y_{de}*	X_{be}*	Y_{be}*
-10	-13.3	13.3	20	-14.8	-19.0

Tab. 3: Řešení soustavy (zaokrouhleno)

7 Shrnutí

V článku byla popsána algoritmizace výpočtu rovinné prutové konstrukce pomocí silové metody. Větší pozornost byla věnována způsobu rozkladu obecné prutové konstrukce a algoritmu sestavení podmínek rovnováhy.

Uvedený postup předpokládá danou, staticky určitou, respektive staticky neurčitou, konstrukci včetně označení redundantních vazeb. V případě staticky neurčité konstrukce se provede její modifikace na základní staticky určitou konstrukci, pro kterou se posléze provede výpočet jednotlivých složek deformací a sestaví se deformační podmínky.

Algoritmus je implementován do balíku *EngineeringStructure* v jazyce Java, publikovaném pod licencí GNU GPL s otevřeným zdrojovým kódem, viz [2]. Dále je k dispozici volně stažitelná aplikace *ForMet* s grafickým uživatelským rozhraním [3], jenž tento balík využívá.

Poděkování

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím projektu ADVASOFT CZ.1.07/2.2.00/15.0142: Pokročilé softwarové nástroje ve stavebním inženýrství. Některé teoretické výsledky byly získány při řešení projektu GA ČR P104/11/0833: Odezva cementových kompozitů na únavové zatěžování: pokročilé numerické modelování a experimenty.

Literatura

[1] KADLČÁK, J., KYTÝR, J. *Statika stavebních konstrukcí II*. Nakladatelství VUTIUM, Brno 2001. ISBN 80-214-2631-4.
[2] FRANTÍK, P. Java package *EngineeringStructure*, www.kitnarf.cz/java, 2011.
[3] ŠTAFA, M., PAIL, T., FRANTÍK, P., Aplikace ForMet, 2011.