MODEL VRSTEVNATÉHO NOSNÍKU PRO DEFORMAČNÍ METODU

MODEL OF LAYERED BEAM FOR DIRECT STIFFNESS METHOD

Petr Frantík[1], Rostislav Zídek[2], Luděk Brdečko[3]

Abstrakt

Článek se věnuje odvození, implementaci a ověření statického modelu vrstevnatého prutu pro obecnou deformační metodu. Jeho účelem je modelování zejména kolíkových spojů nosníků s více vrstvami.

Klíčová slova

vrstevnatý prut, obecná deformační metoda

Abstract

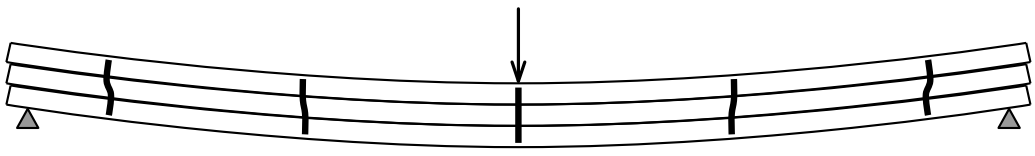
The paper is focused on derivation, implementation and verification of static model of layered beam for direct stiffness method. Its purpose is mainly to model the pinned joints of layered beams.

Keywords

layered beam, pinned joints, direct stiffness method

1 Úvod

Nosníky složené z vrstev vzájemně provázaných pružnými kolíky jsou ve stavebnictví běžné zejména u dřevěných a ocelobetonových konstrukcí. Kolíky mají funkci zajištění částečného (ideálně úplného) přenosu smyku mezi přilehlými vrstvami, viz obr. 1. Bez kolíků by vrstevnatý nosník s oddělenými vrstvami unesl jen zatížení dané sumou únosností jednotlivých vrstev. Díky kolíkům, potažmo díky přenosu smyku mezi vrstvami, jeho únosnost významně vzroste. Je určena, mimo jiné, tuhostí kolíkových spojů a jejich četností. Tento příspěvek je zaměřen na detailnější modelování vrstevnatých prutů s pružnými kolíkovými spoji právě s ohledem na tyto vlastnosti.

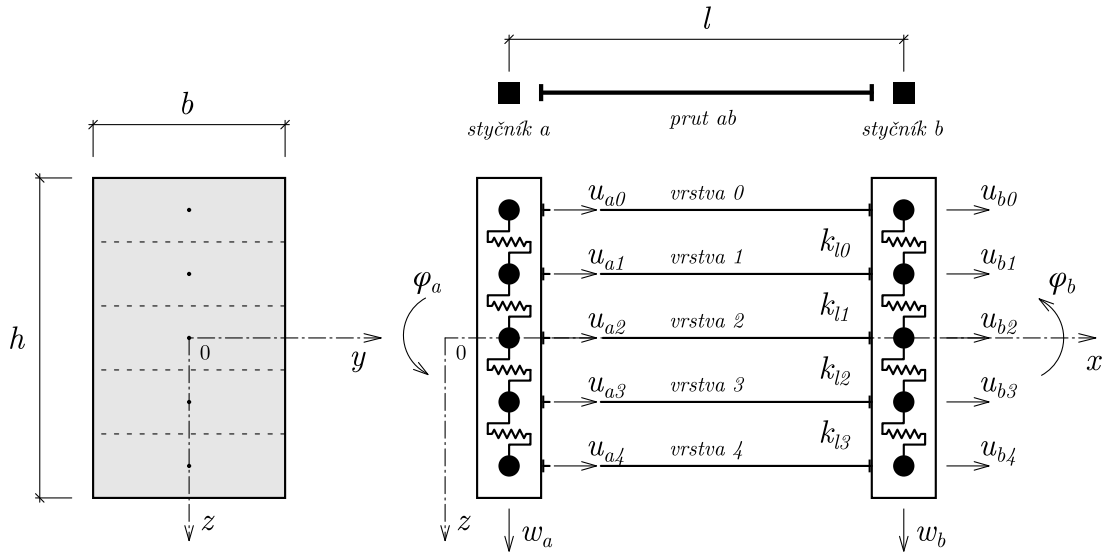


Obr. 1: Vrstevnatý prostě uložený nosník s pružnými kolíky

[1] Ing. Petr Frantík, Ph.D., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, e-mail: kitnarf@centrum.cz
[2] Ing. Rostislav Zídek, Ph.D., dtto, e-mail: zidek.r@fce.vutbr.cz
[3] Ing. Luděk Brdečko, Ph.D., dtto, e-mail: brdecko.l@fce.vutbr.cz

2 Model

Model prutu je koncipován jako statický, lineární a rovinný, fungující v rámci obecné deformační metody, viz např. [1]. Rozšíření je provedeno pomocí obohacení styčníků o $m - 1$ horizontálních posunů, kde m je počet vrstev prutu, viz obr. 2.



Obr. 2: Styčník a prut pro nosník s pěti vrstvami

Každý styčník tak má $m + 2$ stupňů volnosti, což odpovídá tzv. neurčitým posuvům u_{a0}, u_{a1}, ..., u_{am-1}, w_a, φ_a. Tj. styčník je uvažován jako vrstevnatý, mající společný svislý posun a pootočení, přičemž u každé vrstvy může docházet k různým horizontálním posunům u. Vrstvy jsou ve styčníku provázány horizontálními pružinami s tuhostmi k_l, reprezentujícími tuhost kolíkového spoje pro danou dvojici přilehlých vrstev. Pro vrstevnatý styčník tedy lze sestavit matici tuhosti K_a uvedenou ve výrazu:

$$K_a\, r_a = \begin{bmatrix} k_{l0} & -k_{l0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{l0} & k_{l0}+k_{l1} & -k_{l1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -k_{lm-2} & k_{lm-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{a0} \\ u_{a1} \\ \vdots \\ u_{am-1} \\ w_a \\ \varphi_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{a0} \\ X_{a1} \\ \vdots \\ X_{am-1} \\ Z_a \\ M_a \end{Bmatrix} = R_a\,, \tag{1}$$

kde r_a je vektor posuvů styčníku a, R_a je vektor styčníkových sil.

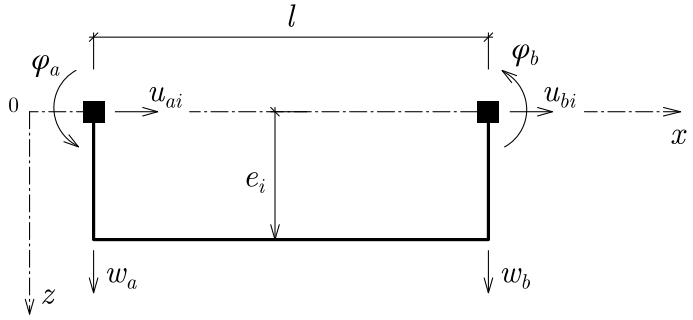
Každý vrstevnatý prut si lze představit jako skupinu m (nevrstevnatých) prutů respektive vrstev na dané excentricitě e. Excentrické připojení vrstvy lze chápat jako pravoúhlý rám o výšce rovné excentricitě e s tuhými stojkami, viz obr. 3. Takto lze snadno odvodit, že pro matici tuhosti tohoto prutu vzhledem k těžištní ose vrstevnatého prutu platí:

$$K_{abi}\, r_{abi} = \left(K_{c,abi} + e_i\, K_{e,abi}\right) r_{abi} = \hat{R}_{abi}\,, \tag{2}$$

kde K_c je matice tuhosti náhradního prutu vrstvy (matice tuhosti nevrstevnatého prutu s nulovou excentricitou, viz např. [1]) a K_e je složka matice tuhosti vzniklá díky jednotkové (kladné) excentricitě, pro kterou platí:

$$e_i \cdot K_{e,abi} \cdot r_{abi} = e_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{ni} & 0 & 0 & -k_{ni} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{ni} & 0 & e_i k_{ni} & -k_{ni} & 0 & -e_i k_{ni} \\ 0 & 0 & -k_{ni} & 0 & 0 & k_{ni} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{ni} & 0 & -e_i k_{ni} & k_{ni} & 0 & e_i k_{ni} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ai} \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_{bi} \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{abi} \\ Z_{abi} \\ M_{abi} \\ X_{bai} \\ Z_{bai} \\ M_{bai} \end{Bmatrix} = \hat{R}_{abi}\,, \tag{3}$$

kde $k_{ni} = EA_i / l$ je normálová tuhost náhradního prutu vrstvy, E je modul pružnosti vrstvy a symbolem A_i je označena její průřezová plocha.



Obr. 3: Prutový model vrstvy

Jednotlivé matice tuhosti náhradních prutů vrstev se sjednotí do matice tuhosti vrstevnatého prutu obdobným způsobem, jako se lokalizují matice tuhosti prutu v matici tuhosti modelu.

3 Algoritmus

Výpočet deformací probíhá analogicky s postupem v obecné deformační metodě s drobným rozšířením, jelikož vrstevnatý styčník má rovněž matici tuhosti. Sestaví se tedy matice tuhosti styčníků a matice tuhosti vrstevnatých prutů. Následně se tyto lokalizují do matice tuhosti modelu. Sestaví se vektor zatížení a uplatní se okrajové podmínky. Vyřeší se soustava rovnic.

Podrobněji lze sestavení matice tuhosti modelu rozepsat (n_s je počet styčníků):

1) Alokuje se matice tuhosti modelu K o rozměru $n_d = n_s\,(m + 2)$.
2) Pro všechny styčníky:
    a) Alokuje a sestaví se matice tuhosti styčníku K_a, dle (1).
    b) Matice styčníku se lokalizuje (přičte) do matice modelu K.
3) Pro všechny vrstevnaté pruty:
    a) Alokuje se matice tuhosti prutu K_{ab} o rozměru $2(m + 2)$.
    b) Pro všechny vrstvy:
        i) Alokuje se matice tuhosti vrstvy K_{abi} (o rozměru 6).
        ii) Sestaví se matice tuhosti náhradního prutu vrstvy $K_{c,abi}$.
        iii) Sestaví se matice příspěvků k tuhosti vlivem excentricity $K_{e,abi}$.

iv) Obě matice se lokalizují do matice tuhosti vrstvy K_{abi}.

v) Matice tuhosti vrstvy se lokalizuje do matice tuhosti prutu K_{ab}.

c) Matice tuhosti prutu se lokalizuje do matice tuhosti modelu K.

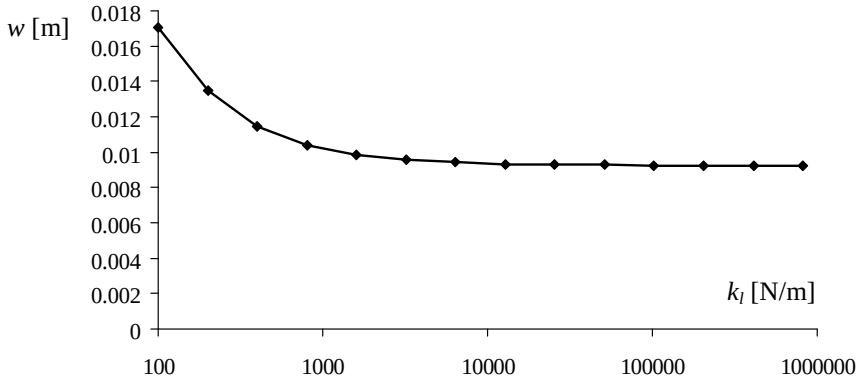
4) Uplatní se okrajové podmínky (typicky nulováním nediagonálních respektive nastavením jednotky u diagonálních členů matice tuhosti na řádcích a sloupcích, které přísluší zabráněným posuvům).

4 Ověření

Model byl ověřován na konvergenci k řešení průhybu konzoly nevrstevnatého nosníku bez uvažování smykového přetvoření. Je-li popsaný model korektně odvozen a implementován, musí průhyb konzoly vrstevnatého nosníku konvergovat k tomuto řešení se zvyšující se tuhostí kolíkových spojů k_l a se zvyšujícím se počtem (ideálně ekvidistantně) rozdělených styčníků. Obdobně, při nulové tuhosti k_l, má průhyb vycházet stejně jako průhyb samostatných vrstev. Pro průhyb konzoly konstantního průřezu, zatížené příčnou silou F na volném konci platí:

$$w = \frac{Fl^3}{3EI}, \tag{4}$$

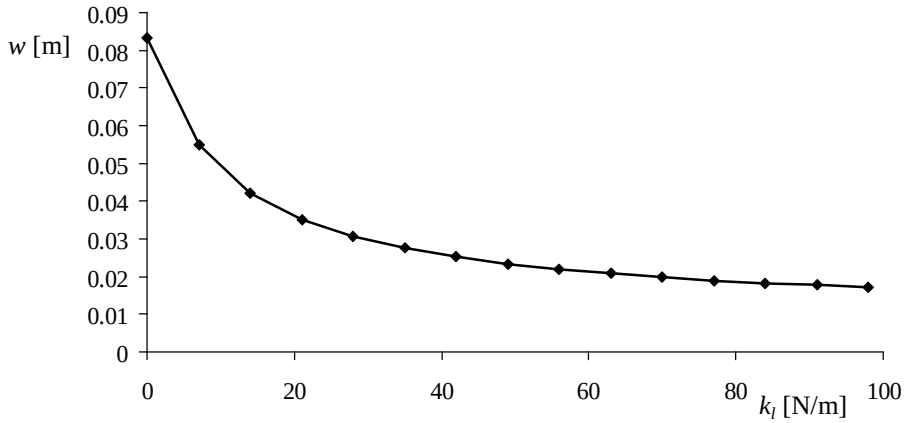
což dává výsledný průhyb w = 0.0092593 m při uvažování dokonalého propojení vrstev a průhyb w = 0.083333 m při uvažování nespolupůsobících vrstev pro konzolu délky l = 5 m, s modulem pružnosti E = 10 GPa a obdélníkovým průřezem šířky b = 0.2 m a výšky h = 0.3 m, zatíženou silou F = 1 N. Model dává hodnotu w = 0.0092602 m při třech ekvidistantních vrstvách a 1000 elementech (respektive kolíkových spojích) s tuhostí k_l = 819 kN/m, což odpovídá odchylce 0.01%. Odpovídající konvergenční graf je znázorněn na obr. 4.



Obr. 4: Konvergence průhybu volného konce konzoly w při vzrůstající tuhosti kolíkového spoje k_l pro 1000 elementů a tři ekvidistantní vrstvy (semilogaritmický graf).

Chování modelu při nulové tuhosti k_l odpovídá teoretické hodnotě, viz obr. 5.

Doplňme, že průhyb konce konzoly pochopitelně závisí na rozmístění kolíkových spojů alias styčníků. Rychlost konvergence pro dokonale propojené vrstvy je výrazně ovlivněna počtem vrstev. Čím více vrstev, tím vyšší tuhosti a počtu elementů je zapotřebí k dosažení přijatelné odchylky od uvedeného teoretického řešení.



Obr. 5: Vývoj průhybu volného konce konzoly *w* pro malé tuhosti kolíkového spoje k_l pro 1000 elementů a tři ekvidistantní vrstvy.

5 Závěr

Článek se věnoval modelování a ověření vlastností prutového modelu vícevrstvého nosníku opatřeného pružnými kolíkovými spoji. Model byl formulován v rámci obecné deformační metody rozšířením stupňů volnosti styčníků.

Ověření modelu ukázalo, že pro limitní teoretické hodnoty průhybu vybraného nosníku dává model správné výsledky.

Doplňme však, že model, tak jak je formulován, trpí drobnou vadou. V úsecích mezi pruty není zaručena (a zajisté je porušena) podmínka vzájemného doteku sousedících vrstev nosníku, což tvoří problém zejména při protnutí vrstev. Toto protnutí lze v rámci lineárního modelu eliminovat zavedením dostatečného počtu mezilehlých styčníků s nulovou tuhostí kolíkového spoje.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl za finanční podpory Grantové agentury České republiky, projekt GAČR 15-07210S, a projektu LO1408 AdMaS UP – Pokročilé materiály, konstrukce a technologie, podporovaného Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky v rámci Národního programu udržitelnosti I.

Literatura

[1] KADLČÁK, J., KYTÝR, J. *Statika stavebních konstrukcí II*., nakladatelství VUTIUM, Brno, 2001. ISBN 80-214-1648-3.